

3a Reunión Académica de Profesores de Matemáticas en Aguascalientes

Organizada por

La Asociación Matemática en Aguascalientes A. C.

**Delegación Estatal de la Asociación Nacional
de Profesores de Matemáticas**

30 de enero de 2016

PROGRAMACIÓN LINEAL EN EL DINERO, LA COMIDA Y EL AMOR

Autor M. I. David Gómez Salas

Objetivo: Contribuir a desarrollar la habilidad de representar los problemas de la vida real, mediante un sistema de ecuaciones que permita analizar y obtener soluciones al problema de la vida real.

En este caso se presenta como ejemplo el uso de la programación lineal en la solución y análisis de algunos problemas de la vida cotidiana y/o profesional. Se formulan tres tipos de problemas que pueden presentarse en la vida real, como sistemas de programación lineal. Una vez alcanzado este propósito se obtienen las soluciones aplicando algún programa de computo de los que existen en el mercado. Un programa de fácil acceso es el comando Solver de Excel.

Ejemplos:

- 1.- Maximizar la ganancias de las inversiones**
- 2,- Minimizar costos de las comidas**
- 3.- Maximizar la felicidad en una relación de amor**

1- MAXIMIZAR LAS GANANCIAS EN LAS INVERSIONES

Se tienen 400 millones para invertir en 4 opciones. Unas inversiones se pueden hacer en el presente y otras a futuro.

Opciones:

- 1.- Por cada peso devuelve 2.75 pesos, 2 años después
- 2.- Por cada peso devuelve 3.20 pesos, 3 años después
- 3.- Por cada peso devuelve 3.30 pesos, 3 años después. Disponible al inicio del año 2.
- 4.- Por cada peso devuelve 2.25 pesos, 1 año después. Disponible al inicio del año 4.

Sea:

X_{ij} .- El dinero invertido en la opción i en el año j

Y_j .- El dinero no invertido en el año j

Representación gráfica de inicio (depósito) y fin de la inversión(retiro):

1	2	3	4	5	Año
X_{11}	X_{12}	X_{13}			Depósito
		$2.75X_{11}$	$2.75x_{12}$	$2.75X_{13}$	Retiro
X_{21}	X_{22}				Depósito
			$3.2X_{21}$	$3.2X_{22}$	Retiro
	X_{32}				Depósito
				$3.3X_{32}$	Retiro
			X_{44}		Depósito
				$2.25X_{44}$	Retiro

El objetivo es Maximizar

$$z = 2.75X_{11} + 2.75X_{12} + 2.75X_{13} + 3.2X_{21} + 3.2X_{22} + 3.3X_{32} + 2.25X_{44}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
 X_{11} + x_{21} + Y_1 &= 400 \dots\dots\dots \text{Año 1} \\
 X_{12} + X_{22} + X_{32} + Y_2 &= Y_1 \dots\dots\dots \text{Año 2} \\
 X_{13} + Y_3 &= Y_2 + 2.75X_{11} \dots\dots\dots \text{Año 3} \\
 X_{44} + Y_4 &= Y_3 + 2.75X_{12} + 3.2X_{21} \dots\dots\dots \text{Año 4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{11} + x_{21} + Y_1 &= 400 \\
 X_{12} + X_{22} + X_{32} - Y_1 + Y_2 &= 0 \\
 X_{13} - 2.75X_{11} - Y_2 + Y_3 &= 0 \\
 X_{44} - 2.75X_{12} - 3.2X_{21} - Y_3 + Y_4 &= 0
 \end{aligned}$$

PRESENTACIÓN DEL SISTEMA PARA RESOLVER EN SOLVER DE EXCEL

Ejemplo de planeación de inversiones

Monto invertido en la inversión tipo i, en el año j

	x11	x12	x13	x21	x22	x32	x44	y1	y2	y3	y4	SP	
Año1	1			1				1				0	= 400
Año2		1			1	1		-1	1			0	= 0
Año3	2.75		1						-1	1		0	= 0
Año4		2.75		3.2			1			-1	1	0	= 0
Tasa	2.75	2.75	2.75	3.2	3.2	3.3	2.25					0	
Coeficiente de x _{ij}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	Valor de la función objetivo												

PRESENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN EN HOJA DE EXCEL

Ejemplo de planeación de inversiones

Monto invertido en la inversión tipo i, en el año j

	x11	x12	x13	x21	x22	x32	x44	y1	y2	y3	y4	SP	
Año1	1			1				1				400	= 400
Año2		1			1	1		-1	1			0	= 0
Año3	2.75		1						-1	1		0	= 0
Año4		2.75		3.2			1			-1	1	0	= 0
Tasa	2.75	2.75	2.75	3.2	3.2	3.3	2.25					4160	
Coeficiente de x _{ij}	0	0	0	400	0	0	1280	0	0	0	0	0	
	Valor de la función objetivo												

$$Z = 400 \times 2.75 + 1280 \times 2.25 = 1280 + 2880 = 4160$$

INFORME DE RESPUESTAS EN SOLVER DE EXCEL

Celda objetivo		
Celda	Nombre	Igual
\$M\$10	Tasa SP	4160

Celdas cambiantes			Límite inferior	Celda objetivo	Límite superior	Celda objetivo
Celda	Nombre	Igual				
\$B\$11	x11	0	0	4160	0	4160
\$C\$11	x12	0	0	4160	0	4160
\$D\$11	x13	0	0	4160	0	4160
\$E\$11	x21	400	400	4160	400	4160
\$F\$11	x22	0	0	4160	0	4160
\$G\$11	x32	0	0	4160	0	4160
\$H\$11	x44	1280	1280	4160	1280	4160
\$I\$11	y1	0	0	4160	0	4160
\$J\$11	y2	0	0	4160	0	4160
\$K\$11	y3	0	0	4160	0	4160
\$L\$11	y4	0	0	4160	0	4160

2- EJEMPLO DE LA DIETA

La naranja cuesta 4 pesos/kilo y tiene 12 gramos de vitamina C y un gramo de vitamina A

La uva cuesta 60 pesos/kilo y tiene 0 gramos de vitamina C y 26 gramos de vitamina A

La zanahoria cuesta 12 pesos/kilo y tiene 3 gramos de vitamina C y 10 gramos de vitamina A

La lechuga cuesta 4 pesos/kilo y tiene 2 gramos de vitamina C y 4 gramos de vitamina A

Se desea preparar una ensalada para 10 personas que contenga en total cuando menos 10 gramos de vitamina C y 12 gramos de vitamina A.

x_1 = Kilos de naranja

x_2 = Kilos de uva

x_3 = Kilos de zanahoria

x_4 = Kilos de lechuga

Minimizar costos

$$Z_1 = 4x_1 + 60x_2 + 12x_3 + 4x_4$$

Restricciones:

$$12x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 10$$

$$x_1 + 26x_2 + 10x_3 + 4x_4 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0$$

PRESENTACIÓN DEL SISTEMA PARA RESOLVER EN SOLVER DE EXCEL

Ejemplo: El problema de la dieta

Naranja Uva Zanahoria Lechuga

	x1	x2	x3	x4	Suma producto		
Vitamina A	12.00	0.00	3.00	2.00	0	≥	10.00
Vitamina C	1.00	26.00	10.00	4.00	0	≥	12.00
Costos	4.00	60.00	12.00	4.00	0.00		
Solución	0.00	0.00	0.00	0.00			
Valor de la función objetivo							

PRESENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN EN HOJA DE EXCEL

Ejemplo: El problema de la dieta
 Naranja Uva Zanahoria Lechuga

	x1	x2	x3	x4	Suma producto		
Vitamina A	12.00	0.00	3.00	2.00	10	≥	10.00
Vitamina C	1.00	26.00	10.00	4.00	12	≥	12.00
Costos	4.00	60.00	12.00	4.00	13.04		
Solución	0.35	0.00	0.00	2.91			
	Valor de la función objetivo						

INFORME DE RESPUESTAS EN SOLVER DE EXCEL

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$F\$6	Costos	0.000	13.043

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$7	Solución x1	0.00	0.35
\$C\$7	Solución x2	0.00	0.00
\$D\$7	Solución x3	0.00	0.00
\$E\$7	Solución x4	0.00	2.91

2A- LAS VITAMINAS SOLUBLES (DUAL DEL PROBLEMA DE LA DIETA)

Un laboratorio farmacéutico desea determinar el precio máximo a que podría vender la vitamina C y vitamina A, solubles. El dueño del restaurante desea que no sea más caro que comprar las frutas como fuente de vitaminas y que le resulte más simple agregar las 10 gramos de vitamina C y 12 gramos de vitamina A; al agua para 10 personas.

El laboratorio sabe que:

La naranja cuesta 4 pesos/kilo y tiene 12 gramos de vitamina C y un gramo de vitamina A

La uva cuesta 60 pesos/kilo y tiene 0 gramos de vitamina C y 26 gramos de vitamina A

La zanahoria cuesta 12 pesos/kilo y tiene 3 gramos de vitamina C y 10 gramos de vitamina A

La lechuga cuesta 4 pesos/kilo y tiene 2 gramos de vitamina C y 4 gramos de vitamina A

x_C = Precio de la vitamina C en \$/g

x_A = Precio de la vitamina A en \$/g

Maximizar precios de venta

$$Z_2 = 10x_C + 12x_A$$

Restricciones para que no prefieran comprar naranja, uva, zanahoria o lechuga :

$$12x_C + x_A \leq 4$$

$$0x_C + 26x_A \leq 60$$

$$3x_C + 10x_A \leq 12$$

$$2x_C + 4x_A \leq 4$$

$$x_C \geq 0; \quad x_A \geq 0$$

PRESENTACIÓN DEL SISTEMA PARA RESOLVER EN SOLVER DE EXCEL

El problema de las vitaminas solubles

Vitamina C Vitamina A

C

A

	x_C	x_A	Suma de productos		
Naranja	12.00	1.00	0.00	\leq	4.00
Uva	0.00	26.00	0.00	\leq	60.00
Zanahoria	3.00	10.00	0.00	\leq	12.00
Lechuga	2.00	4.00	0.00	\leq	4.00
Requerimientos	10.00	12.00	0.00		
\$/g	0.00	0.00			

Valor de la función objetivo

PRESENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN EN HOJA DE EXCEL

El problema de las vitaminas solubles

Vitamina C Vitamina A

	Xc	Xa	Suma de productos		
Naranja	12.00	1.00	4.00	≤	4.00
Uva	0.00	26.00	22.61	≤	60.00
Zanahoria	3.00	10.00	9.48	≤	12.00
Lechuga	2.00	4.00	4.00	≤	4.00
Requerimientos	10.00	12.00	13.04		
\$/g	0.26	0.87			
	Valor de la función objetivo				

INFORME DE RESPUESTAS EN SOLVER DE EXCEL

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$D\$10	Requerimientos Suma de productos	0.00	13.04

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$11	\$/g Xc	0.00	0.26
\$C\$11	\$/g Xa	0.00	0.87

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$D\$6	Naranja Suma de productos	4.00	\$D\$6<=\$F\$6	Obligatorio	0
\$D\$7	Uva Suma de productos	22.61	\$D\$7<=\$F\$7	Opcional	37.39130435
\$D\$8	Zanahoria Suma de productos	9.48	\$D\$8<=\$F\$8	Opcional	2.52173913
\$D\$9	Lechuga Suma de productos	4.00	\$D\$9<=\$F\$9	Obligatorio	0

Primal:

$$Z_1 = 4x_1 + 60x_2 + 12x_3 + 4x_4$$

$$Z_1 = 4(0.35) + 0x_2 + 0x_3 + 4(2.91)$$

$$Z_1 = 1.4 + 11.64$$

$$Z_1 = 13.04$$

Dual:

$$Z_2 = 10x_C + 12x_A$$

$$Z_2 = 10(0.26) + 12(0.87)$$

$$Z_2 = 2.6 + 10.44$$

$$Z_2 = 13.04$$

Minimizar costos

$$Z_1 = 4x_1 + 60x_2 + 12x_3 + 4x_4$$

Maximizar precios de venta

$$Z_2 = 10x_C + 12x_A$$

Restricciones:

$$12x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 10$$

$$x_1 + 26x_2 + 10x_3 + 4x_4 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0$$

Restricciones:

$$12x_C + x_A \leq 4$$

$$0x_C + 26x_A \leq 60$$

$$3x_C + 10x_A \leq 12$$

$$2x_C + 4x_A \leq 4$$

$$x_C \geq 0; \quad x_A \geq 0$$

3 - LA FELICIDAD DE PEPE

Pepe desea maximizar la felicidad mensual que le producen los abrazos y besos de Marisol, realizando el menor esfuerzo. En una escala de calificación de cero a cinco. Pepe califica con 3 unidades de felicidad un abrazo y con 5 unidades de felicidad un beso.

1.- Marisol premia a Pepe con abrazo o beso de acuerdo los méritos siguientes:

— 1 visita a casa + 3 acompañamientos a la Escuela = Un abrazo.

— 2 acompañamientos al Centro Comercial + 2 acompañamientos a la Escuela = Un beso.

2.- El padre de Marisol solo permite que en un mes Pepe la visite a su casa un máximo de 4 veces; la acompañe al Centro Comercial un máximo de 12 veces; y la acompañe a la escuela un máximo de 18 veces.

3.- Un acompañamiento a la Escuela solo se puede contabilizar para el abrazo o para el beso, no para ambos.

4.- Cada mes la contabilidad se inicia a partir de cero. No se conservan saldos del mes anterior.

Preguntas, con la menor pérdida de energía:

¿Cual es el máximo de unidades de felicidad puede obtener Pepe, al mes? ¿Cuántas veces debe visitarla a su casa? ¿Cuántas veces debe acompañarla al centro comercial? ¿Cuántas veces debe acompañarla a la escuela? ¿Cuántos abrazos y besos recibirá Pepe?

Sea

x_1 el número de abrazos

x_2 el numero de besos

El objetivo es Maximizar

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

Sujeto a la restricciones siguientes:

$$x_1 + 0x_2 \leq 4 \text{ Casa}$$

$$0x_1 + 2x_2 \leq 12 \text{ Centro Comercial}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \text{ Escuela}$$

PRESENTACIÓN DEL SISTEMA PARA RESOLVER EN SOLVER DE EXCEL

Ejemplo: La felicidad de Pepe

	Abrazos(x_1)	Besos(x_2)	Sumaproducto	
Casa	1.00	0.00	0.00	≤ 4.00
C. Comercial	0.00	2.00	0.00	≤ 12.00
Escuela	3.00	2.00	0.00	≤ 18.00
Unidades de felicidad	3.00	5.00	0.00	
Renglón para solución	0.00	0.00		

SOLUCIÓN OBTENIDA EN SOLVER DE EXCEL

Ejemplo: La felicidad de Pepe

	Abrazos(x1)	Besos(x2)	Sumaproducto	
Casa	1.00	0.00	2.00	≤ 4.00
C. Comercial	0.00	2.00	12.00	≤ 12.00
Escuela	3.00	2.00	18.00	≤ 18.00
Unidades de felicidad	3.00	5.00	36.00	
Solución	2.00	6.00		

Visitas a casa = 2

Acompañamientos al Centro Comercial = 12

Acompañamientos a la Escuela = 18

Abrazos = 2

Besos = 6

Felicidad = 36 unidades de felicidad

RESULTADOS DE EXCEL

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
	Unidades de felicidad		
\$D\$9	Sumaproducto	0.00	36.00

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$10	Solución Abrazos(x1)	0.00	2.00
\$C\$10	Solución Besos(x2)	0.00	6.00

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$D\$6	Casa Sumaproducto	2.00	\$D\$6<=\$F\$6	Opcional	2
\$D\$7	C. Comercial Sumaproducto	12.00	\$D\$7<=\$F\$7	Obligatorio	0
\$D\$8	Escuela Sumaproducto	18.00	\$D\$8<=\$F\$8	Obligatorio	0

3A- EL SEGUNDO AMOR

Tiempo después Marisol tiene nuevo novio, Juan y la visitará a su casa 4 veces, la acompañará al centro comercial 12 veces y la acompañará a la escuela 18 veces. En su relación con Pepe, Marisol no determinó cuanto le costaba, en unidades de felicidad, cada visita a su casa, acompañamiento al centro comercial y acompañamiento a la escuela. Supo que para Pepe un abrazo equivalía a 3 unidades de felicidad; y un beso equivalía a 5 unidades de felicidad. Marisol desea conocer cuanta felicidad produce cada visita a su casa, acompañamiento al centro comercial y al acompañamiento a la escuela. En el fondo Marisol sigue amando a Pepe, por eso desea darle lo menos posible de amor a Juan, pero que Juan reciba igual o un poco más de felicidad que la que recibió Pepe.

Sean:

x_1 Unidades de felicidad por visita a casa

x_2 Unidades de felicidad por acompañamiento al Centro comercial

x_3 Unidades de felicidad por acompañamiento a la Escuela

El objetivo es Minimizar

$$z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$$

Sujeto a la restricciones siguientes:

$$x_1 + 0x_2 + 3x_3 \geq 3 \text{ Abrazo}$$

$$0x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \text{ Beso}$$

PRESENTACIÓN DEL SISTEMA PARA RESOLVER EN SOLVER DE EXCEL

Ejemplo: El segundo amor					
	Casa,	C Comercial,	Escuela,	Sumaproducto	
	x_1	x_2	x_3		
Abrazo	1	0	3	0.00	≥ 3
Beso	0	2	2	0.00	≥ 5
Frecuencia mensual	4	12	18	0.00	
Renglón para solución	0.00	0.00	0.00		

SOLUCIÓN EN SOLVER DE EXCEL

Ejemplo: El segundo amor					
	Casa,	C Comercial,	Escuela,	Sumaproducto	
	x_1	x_2	x_3		
Abrazo	1	0	3	3.00	≥ 3
Beso	0	2	2	5.00	≥ 5
Frecuencia mensual	4	12	18	36.00	
Solución	0.00	1.50	1.00		

Costo por visitas a casa = 0

Costo por acompañamientos al Centro Comercial = 1.5

Costo por acompañamientos a la Escuela = 1.0

Felicidad = 36 unidades de felicidad

INFORME DE RESULTADOS SOLVER

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
	Frecuencia mensual		
\$E\$7	Sumaproducto	0.00	36.00

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$8	Solución Casa, x1	0.00	0.00
\$C\$8	Solución C Comercial, x2	0.00	1.50
\$D\$8	Solución Escuela, x3	0.00	1.00

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$E\$5	Abrazo Sumaproducto	3.00	\$E\$5>=\$G\$5	Obligatorio	0.00
\$E\$6	Beso Sumaproducto	5.00	\$E\$6>=\$G\$6	Obligatorio	0.00